Лекция №1

ЫҚТИМАЛДЫҚ КЕҢІСТІГІ

1. Ықтималдықтар теориясы пәніне тарихи шолу

Өткен ғасырдың соңы мен осы ғасырдың басында жаратылыс тану ғылымдарының қажеттіліктерінен туған әлдеқайда салиқалы сұранымдар математиканың бүгінде ықтималдықтар теориясы деп аталатын саласының тез дамуына әкеп соқты. Математиканың бұл саласы қазіргі уақытқа дейін қарқынды түрде даму үстінде.

Ықтималдықтар теориясының пайда болуын әдетте XVII ғасырдың орта шеніне жатқызады және құмар ойындардың комбинаторикалық есептерімен байланыстырады. Әрине, құмар ойындарды қандай да бір ғылымның негізі бола алатындай негіз деп қарастыруға болмайды. Дегенмен де дәл осындай ойындар сол кездегі белгілі математикалық модельдердің қамтуына кірмейтін есептердің пайда болуына әкеп соққанын және жаңа идеялар, әдістер кіргізуге себепші болғандығын атап өту керек. Бұл жаңа элементтердің енгізілуі Гюйгенс, Паскаль, Ферма, Яков Бернулли секілді математиктердің аттарымен байланысты.

Мұнда әрине мынаған назар аударған жөн: жоғарыда аталған аса көрнекті математиктер құмар ойындар есептерімен айналыса отырып, кездейсоқ құбылыстарды зерттейтін ғылымның болашақтағы рөлін де болжай білді. Олар көп қайталанатын кездейсоқ құбылыстар негізінде белгілі бір заңдылықтар пайда болу мүмкіндігін де көре білді. Бірақ жаратылыстану ғылымдарының сол кездегі дамуының төмен деңгейлілігіне байланысты құмар ойындар мен сақтандыру және демография сұранымдары әлі де көп уақытқа дейін ықтималдықтар теориясының ұғымдары мен әдістері негізделген жеке салалар болып қала берді. Осыған байланысты ықтималдықтар теориясында пайда болған есептер де тек элементар-арифметикалық және комбинаторикалық әдістермен шешіліп отырды. Ықтималдықтар теориясының кейінгі дамуы және оның әдістерінің ғылымның сан саласына, әсіресе жаратылыстану ғылымдарына, оның ішінде физикаға кеңінен қолданылуы классикалық ұғымдар мен әдістердің осы күнге дейін өз орнын жоғалтпағандығын көрсетті.

Жаратылыстану ғылымдары тарапынан қойылған әлдеқайда терең сұранымдар (бақылаулардың қателіктері теориясы, атулар теориясының есептері, статистиканың проблемалары т.с.с) ықтималдықтар теориясын ары қарай дамыта түсуге, ол үшін әлдеқайда дамыған аналитикалық әдістерді қолдануға әкеп соқты. Ықтималдықтар теориясының аналитикалық әдістерін дамыту жолында ерекше рөл атқарған ғалымдар ретінде Муавр, Лаплас, Гаусс, Пуассондардың есімдерін атап өткен жөн.

XIX ғасырдың жартысынан бастап XX ғасырдың жиырмасыншы жылдары арасында ықтималдықтар теориясының дамуы көбіне П.Л.Чебышев, А.А.Марков, А.М.Ляпунов секілді орыс ғалымдарының есімдерімен байланысты. Бұлардың жұмыстырының ықтималдықтар теориясы үшін ең маңыздылығы кездейсоқ шама ұғымын енгізуде болды.

Ықтималдықтар теориясының қазіргі дамуы әлемде оған деген қызығушылықтың өсуі мен оның қолдану аясының мейлінше кеңи түсушілігінде болып отыр. Ықтималдықтар теориясының дамуына іргелі үлес қосқан ғалымдардың ішінде АҚШ, Франция, Швеция, Италия, Жапония, Польша, Ұлыбритания, Венгрия және бұрынғы КСРО-ның көптеген ғалымдарының есімін атауға болар еді. Бұлардың ішінде әсіресе орыс ғалымдары С.Н.Бернштейн, А.Н.Колмогоров және А.Я.Хинчиннің алар орындары ерекше. Оның бір дәлелі ретінде қазіргі заманғы ықтималдықтар теориясы ұлы математик А.Н.Колмогоров енгізген аксиоматикаға негізделгенін айтса да жеткілікті.

Жоғарыда айтқанымыздай қазіргі заманғы жаратылыстану саласында ықтималдықтар теориясының атқаратын рөлі уақыт өткен сайын аса үлкен қарқынмен өсе түсуде. Жаратылыстану ғылымдарының, әсіресе физиканың даму барысы ықтималдықтар теориясының аппараты табиғаттың көптеген құбылыстарын зерттеуге ыңғайлы да пайдалы болатындығын көрсетті. Жаңа теориялық нәтижелер ықтималдықтар теориясы әдістерінің қолдануларына жаңа мүмкіндіктер ашуда, ал табиғат құбылыстарын жан- жақты зерттеу ықтималдықтар теориясын кездейсоқтықпен байланысты жаңа заңдылықтар іздеуге ұмтылдыруда. Қазіргі уақытта ықтималдықтар теориясы басқа ғылым салаларымен бірлесе отырып, даму үстінде.

Сонымен, жалпы айтсақ, ықтималдықтар теориясы- кездейсоқ құбылыстардың заңдылықтарын зерттейтін математиканың саласы. Сондықтан да табиғат туралы біздің біліміміздің өсе түсуі ықтималдықтар теориясының алдына алуан түрлі тың сұраулар қоя беретіндігі түсінікті, ал екінші жағынан бұлай болуы парадокс секілді көрінуі мүмкін. Себебі, ықтималдықтар теориясының негізгі объектісі кездейсоқтық немесе анықталмағандық, ал бұлар өз кезегінде біздің біліміміздің жеткіліксіздігіне байланысты. Мәселен, егер біз тиын лақтырсақ, онда тиын құлаған кездегі оған әсер ететін барлық факторларды толық ескеру өте қиын, тіптен мүмкін емес деуге де болады. Бірақ атап өтілген парадокс атүсті қарағанда ғана парадокс, шындығында табиғатта дәл анықталған мөлшерлік заңдар жоқ дерлік. Мәселен, физикадан белгілі газдың температурасының оның қысымына тәуелділігі туралы заң газ молекулаларының жылдамдықтары мен олардың ыдыс жақтауына соғылу сандарының арасындағы байланысты білдіретін ықтималдыққа тән қасиет. Бұл жерде пайда болатын кездейсоқ ауытқулар әдеттегі температуралар мен қысымдар облысында үлкен ықтималдықпен өте аз болады және де біздің құралдарымыз оларды тіркей де алмайды.

Анықталмағандық принципі бағытында да бір-екі ауыз сөз айта кетелік. Бұл принцип бойынша өзара байланысты кез келген екі физикалық сипаттама үшін оның біреуін бекітіп қою екіншісін анықтауға мүлдем мүмкіндік бермейді. Қарастырып отырған жағдайда кездейсоқтық біздің біліміміздің жеткіліксіздігінен емес, ол басқаша бір принципиалды құбылыс- заттар үшін табиғи құбылыс ретінде пайда болады. Мәселен радиоактивті ядроның өмір сүру уақыты негізінен кездейсоқ шама, ал бұл кездейсоқтық біздің біліміміздің жетіле түскенінен жөнделе қоятын нәрсе емес.

Сонымен, анықталмағандық таным процесінің басында тұрды және ол оның әрқашан алдында да тұра береді. Бұл ескертулер, әрине жалпы мағынадағы ескертулер. Бірақ қай кезде ықтималдықтар теориясының әдістерін қолдану керек, қай кезде қолданбау керек деген сұраққа жауапты, шамасы, әрқашан аталмыш құбылысты біз қандай дәлдікпен зерттейтініміз бен ол құбылыстың табиғаты туралы не білетіндігіміздің ара қатынасы арқылы беру керек.

2. Адам тіршілігінің барлық салаларында қандай да бір тәжірибелер немесе бақылаулар белгілі бір шарттар орындалғанда көптеген рет қайталанатын жағдайлар жиі кездесіп тұрады. Ықтималдықтар теориясы осындай эксперименттер кезінде нәтижелері тәжірибеден тәжірибеге өзгеріп отыратын оқиғаларды зерттеумен айналысады. Мұндай оқиғалар әдетте *кездейсоқ оқиғалар* деп аталады.

Мысал үшін біз симметриялы тиынды бір рет лақтырдық делік. Бұл эксперименттің тек екі ғана нәтижесі болуы мүмкін: не “герб” түседі не “цифр” түседі. Бірақ біз тәжірибенің нәтижесін алдын-ала дөп басып дәл айта алмаймыз, себебі біздің тиын құлаған кезде оған әсер ететін барлық факторларды ескере алатын мүмкіндігіміз жоқ. Сол сияқты қандай да бір аса күрделі механизмнің белгілі бір уақытқа дейін істен шығатынын не шықпайтындығын, немесе алынған лотерея билетінің ұтатын не ұтпайтындығын да біз алдын-ала дөп басып дәл айта алмаймыз. Бұдан шығатын қорытынды мынау: жеке тәжірибелердің нәтижелерін қарастыру арқылы қандай да бір заңдылықтарды байқау өте қиын, яғни нендей де бір теория құруға жеткілікті негіз жоқ.

Егер де мұндай тәжірибелерді көптеген рет қайталайтын болсақ мынандай заңдылықты байқауға болады екен: тәжірибенің жеке нәтижелері әрқилы болғанымен оның орташа нәтижелерінің *орнықтылық қасиеті* бар. Мысалы, тиынды бір рет лақтырған тәжірибемізді n рет қайталалық және $n_Г$ деп осы n тәжірибе кезіндегі гербтің түсу санын белгілейік. Мынандай график салалық: абсцисса осіне тәжірибе санын, ал ордината осіне гербтің түсу жиілігі $\frac{n_Г}{n}$ - ді орналастыралық. Онда n өскен сайын ($n_Г$, $\frac{n_Г}{n}$) нүктелерін қосатын сызықтың $\frac{n_Г}{n}=\frac{1}{2}$ түзуіне өте жақындай беретіндігін байқауға болады екен. (Бұл айтылған қасиетті тексеру үшін XVIII ғасырда Ж. Бюффон тиынды 4040 рет лақтырып тәжірибе жасаған. Сонда герб 2048 рет түскен, яғни гербтің түсу жиілігі $\frac{n_Г}{n} \approx 0{,}508$ болған. К. Пирсон тәжірибені 24000 рет қайталағанда герб 12012 рет түскен, яғни $\frac{n_Г}{n} \approx 0{,}5005$ болЄан. (Қараңыз. *Б.В.Гнеденко. Курс теории вероятностей*. М, Наука, 1969).

Байқалған құбылыс жалпы жағдайға да тән екен: бірдей шарттар орындалған жағдайда қайталанатын тәжірибенің саны мейлінше үлкен болғанда нәтиженің (оқиғаның) пайда болуының жиілігі қандай да бір $p \in [0,1]$ санына мейлінше жақындай түседі.

Әрине, бір қарағанда оқиғаның ықтималдығы деп осы оқиғаның жиілігі ұмтылатын p санын алу керек секілді (ықтималдықтың Мизес бойынша анықтамасы). Бірақ ықтималдықты бұлай анықтау ыңғайсыз, себебі оқиға үшін эксперименттің бір сериясындағы жиіліктер тізбегі екінші бір сериядағы жиіліктер тізбегінен әрқашан дерлік бөлек. Оның үстіне біз бүкіл жиіліктер тізбегін емес, оның тек ақырлы элементтерін ғана қарастыра аламыз (“шексіз” көп тәжірибе жүргізу мүмкін емес). Ендеше ықтималдықты жиіліктің жоғарыда айтылған қасиеті орындалатындай етіп басқаша анықтау керек, яғни тәжірибе саны n өскен сайын қарастырып отырған оқиғаның жиілігі оның ықтималдығына қандай да бір мағынада мейлінше жақын болуы (ұмтылуы) керек. Бұдан мынандай қорытынды жасауға болады: ықтималдық бола алатын p саны теріс емес, нөл мен бірдің арасында жатады $\left(0 \le p \le 1\right)$ және ақиқат оқиғаның, яғни тәжірибе нәтижесінде міндетті тҮрде орындалатын оқиғаның ықтималдығы бірге тең деп алу керек.

Біз бұл оқу құралында ықтималдықты дискретті элементар оқиғалар кеңістігі деп аталатын қарапайым элементар оқиғалар кеңістігі негізінде анықтаймыз.

Дискретті элементар оқиғалар кеңістігі

Нәтижелері кездейсоқ болатын қандай да бір экспериментті (тәжірибені, сынақты, бақылауды, т.с.с.) қарастырып отырмыз делік. Осы эксперименті математикалық түрЄыдан сипаттау үшін ықтималдықтар теориясында ең алдымен осы экспериментке сәйкес келетін элементар оқиЄалар кеңістігі (э.о.к.) деген ұғым енгізіледі. Мұндай кеңістік деп біз эксперименттің мүмкін болатын, өзара сиыспайтын (яғни бірдей уақытта пайда болмайтын) жалғыз мүмкіндікті барлық нәтижелерінің жиынын айтамыз. Және де айта кететін бір нәрсе, эксперименттің барлық қажет болатын нәтижелері осы жиынның (э.о.к.) элементтері арқылы өрнектелетін болуы керек. Сонымен, егер Ω деп экспериментке сәйкес келетін элементар оқиЄалар кеңістігін белгілесек, онда $\Omega = \{\omega\}$, ω "элементар оқиғалар" (нәтижелер) жиыны.

Элементар оқиғалар кеңістігін сипаттау қандай да бір эксперименттің ықтималдықтық моделін құрудағы бірінші қадам. Енді элементар оқиғалар кеңістігінің құрылымын сипаттауға бірнеше мысал келтірейік.

Мысалдар

1) Экперимент тиынды бір рет лақтырудан тұрсын делік. Онда Ω екі Єана "нүктеден" (элементар оқиғадан) тұрады:

$\Omega = \{Г, Ц\}$, мұндағы Г "герб", Ц "цифр" түсуін білдіреді. (Біз "тиын қырымен тұрды", "тиын жоғалып кетті" т.с.с. жағдайлар болуы мүмкін емес деп есептейміз).

2) Егер эксперимент тиынды *n* рет лақтырудан тұратын болса, онда сәйкес келетін элементар оқиЄалар кеңістігі Ω -ны, мәселен, былай сипаттауымызға болады:

$$\Omega = \{\omega:: \ \omega = (a_1, a_2, \ldots, a_n); \ \ a_i = Г \ немесе \ Ц, \quad i = 1,2,\ldots,n\}$$

Бұл жағдайда Ω -ның барлық нәтижелерінің саны $|\Omega| = 2^n$ (дәлелдеңіз), ал $a_i = Г \ \ (немесе \ \ a_i = Ц)$ $i -$ ші тәжірибеде "герб" ("цифр") түскендігін білдіреді.

Ескерту. Бұдан былай қандай да бір *А* жиынының элементерінің санын (қуатын) $|A|$ арқылы белгілейміз.

3) Эксперимент ойын сүйегін бір рет лақтырудан тұратын болсын. (ойын сүйегі деп біртекті материалдан жасалған, жақтары 1,2,3,4,5,6 цифрларымен қарама қарсы жақтарындағы цифрларының қосындысы 7 болатындай етіп нөмірленген кубты айтады. Ерте кездерде мұндай кубтарды көбінесе піл сүйегінен жасаған, "ойын сүйегі" деп аталуы да сондықтан). Онда $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ деп жазуға болады, мұндағы *i* цифры сәйкес *i* ұпай түскендігін білдіреді. (*i*= 1,2,3,4,5,6).

4) Эксперимент ойын сүйегін n рет лақтырудан тұратын болсын. Егер $j - ші$ экспериментте түскен ұпай санын i_j деп (i_j = 1,2,3,4,5,6) белгілесек, онда Ω -ны мәселен былай жазуға болады.

$$\Omega = \{\omega:: \ \omega = (i_1, i_2, \ldots, i_n); \ \ i_j \in \Omega_0, \quad j = 1,2.,\ldots,n\}, \quad \Omega_0 = \{1,2,3,4,5,6\}.$$

Ал барлық нәтижелер саны $|\Omega| = 6^n$ (Дәлелдеңіз!)

5) Экспериментті былай анықталық. Алдымен тиын лақтырылады. Егер "герб" түсетін болса, онда екінші рет ойын сүйегі лақтырылады, ал "цифр" түсетін болса, онда тағы да тиын лақтырылады. Бұл жағдайда э.о.к. Ω -ны мәселен былай жазуға болады:

$$\Omega = \{Г1, Г2, Г3, Г4, Г5, Г6, ЦГ, ЦЦ\}$$

Келтірілген мысалдардың бәрінде де сәйкес элементар оқиғалар кеңістіктері ақырлы санды элементтерден ("элементар оқиғалардан") тұрады. Мұндай ақырлы санды элементтерден тұратын элементар оқиғалар кеңістігі *ақырлы элементар оқиғалар кеңістігі* деп аталады.

6) Эксперимент тиынды қашан "герб" түскенше лақтырудан тұрсын. Онда сәйкес элементар оқиғалар кеңістігін былай жазуға болады:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots\},$$

мұндағы $\omega_n = \underbrace{ЦЦ\ldots Ц}_{n-1} Г$ тиынды *n*-ші рет лақтырғанда алғаш рет “герб” түскендігін көрсетеді.

Көріп отырғанымыздай, бұл мысалда Ω саналымды жиын.

Ақырлы немесе саналатын элементтерден (“элементар оқиғалардан”) тұратын элементар оқиғалар кеңістігі *дискретті элементар оқиғалар кеңістігі* деп аталады.

Ескерте кететін жай, элементар оқиғалар кеңістігі міндетті түрде дискретті бола бермейді. Мәселен, эксперимент энергияларының мүмкін мәндері $[0, \nu],\ \nu > 0$ аралығын толтыратын бөлшектердің энергиясын өлшеуден тұратын болсын. Онда осы кесіндінің нүктелерінің жиыны (элементар оқиғалар жиыны) континуалды. Немесе эксперимент аурудың электрокардиограммасын түсіруден тұратын болсын. Онда элементар оқиғалар кеңістігі қандай да бір функционалдық кеңістіктің элементі. Егер де эксперимент белгіленген бөлшектің ыдыс ішіндегі судағы қозғалысынан тұрса, онда элементар оқиғалар кеңістігі - бөлшектің барлық мүмкін болатын траекторияларының жиыны т.с.с.

Сонымен математикалық тұрғыдан алып қарағанда элементар оқиғалар кеңістігі ұғымы геометриядағы нүкте ұғымы сияқты анықталмайтын нәрсе, ол - бастапқы ұғым. Оның нақты қандай екендігінде, әдетте, біздің жұмысымыз жоқ. Біз үшін ол қандай да бір жиын. Дискретті элементар оқиғалар кеңістігі Ω -ның кез келген ішкі жиыны A $\left(A \subseteq \Omega\right)$ *оқиЄа (кездейсоқ оқиға)* деп аталады. Басқаша айтқанда, кездейсоқ оқиға дегеніміз эксперимент нәтижесінде осы оқиғаның пайда болуына әкеп соғатын элементар оқиЄалардың жиыны. (Егер қандай да бір $\omega \in A$ пайда болатын болса, онда *A* оқиғасының пайда болғандығы).

Екі *A* және *B* оқиғаларының *қосындысы* (бірігуі) деп (оны $A \bigcup B$ деп белгілейміз) *A* және *B* оқиғаларының ең болмағанда біреуіне тиісті элементар оқиғалардан тұратын оқиғаны айтады:

$$A \bigcup B = \left\{\omega \in \Omega: \quad \omega \in A \ \text{ немесе } \omega \in B\right\}$$

Ықтималдықтар теориясының тілінде $A \bigcup B$ *A* немесе *B* оқиғаларының ең болмағанда біреуі пайда болғанда ғана пайда болатын оқиға.

A және *B* оқиғаларының *көбейтіндісі (қиылысуы)* деп (оны $A \bigcap B$ немесе AB деп белгілейміз) осы оқиғалардың екеуіне де ортақ элементар оқиғалардан тұратын оқиғаны айтады:

$$AB = \left\{\omega \in \Omega: \quad \omega \in A \quad \textit{және } \omega \in B\right\}$$

AB оқиғасы A және B оқиғаларының екеуі де пайда болған жағдайда ғана пайда болатын оқиға.

A және B оқиғаларының *айырымы* деп (оны $A \setminus B$ деп белгілейміз) A оқиғасына тиесілі, бірақ B оқиғасына тиесілі емес элементар оқиғалардан тұратын оқиғаны айтады:

$$A \setminus B = \left\{\omega \in \Omega: \quad \omega \in A, \ \ \omega \notin B\right\}$$

$A \setminus B$ оқиғасы A оқиғасының пайда болуынан және B -ның пайда болмауынан тұратын оқиға.

A оқиғасына *қарама-қарсы* (кері) оқиға деп (оны $\overline{A}$ деп белгілейміз) A оқиғасына тиесілі емес элементар оқиғалардан тұратын оқиғаны айтады:

$$\overline{A} = \Omega \setminus A = \left\{\omega \in \Omega: \quad \omega \notin A\right\}$$

Қарама-карсы $\overline{A}$ оқиғасы A оқиғасы пайда болмаған кезде ғана пайда болатын оқиға.

$\Omega \subseteq \Omega$ болғандықтан анықтама бойынша Ω -да оқиға. Бұл оқиға *ақиқат оқиға* деп аталады. Ақиқат оқиға эксперимент нәтижесінде міндетті түрде пайда болатын оқиға.

Бос жиын $\varnothing \subseteq \Omega$, ендеше $\varnothing$ оқиға және оның құрамында бірде-бір элементар оқиға жоқ. $\varnothing$ *мүмкін емес оқиға* деп аталады. Мүмкін емес оқиға эксперимент нәтижесінде мүлде пайда болмайтын оқиға.

Егер A оқиғасына тиесілі әрбір элементар оқиға B оқиғасына да тиесілі болатын болса ($\omega \in A \Rightarrow \omega \in B$ яғни $A \subseteq B$ болса), онда A оқиғасы B оқиғасын *ілестіреді* дейді. Егер A оқиғасы B оқиЄасын ілестіретін болса, онда A оқиғасы пайда болған әрбір жағдайда B оқиғасы да пайда болады. Мәселен, элементар $\omega \in \Omega$ оқиғасы Үшін $\omega \in A$ болатын болса, онда ω оқиғасы A оқиғасын ілестіреді, яғни A оқиғасы пайда болады.

Егер $A \subseteq B$ және $B \subseteq A$ болса, басқаша айтқанда A оқиғасы B оқиғасын, ал B оқиғасы A оқиғасын ілестіретін болса, онда A және B оқиғалары *өзара тең оқиғалар* деп аталады және де оны $A = B$ деп белгілейді. Өзара тең оқиғалар тек бірдей уақытта ғана не пайда болады, не пайда болмайды.

Егер A жєне B оқиғалары бірдей уақытта пайда болуы мүмкін емес болса, яғни $AB = \varnothing$ болса, онда мұндай оқиғалар *үйлесімсіз* оқиғалар деп аталады.

Үйлесімсіз оқиғалар үшін әдетте $A \bigcup B$ орнына $A + B$ деп жазады, яғни $A + B$ жазуы A жєне B үйлесімсіз оқиғаларының қосындысын білдіреді.

Әрине, $\overline{\varnothing} = \Omega$, $\overline{\Omega} = \varnothing$, яғни ақиқат оқиға мен мүмкін емес оқиға өзара қарама-қарсы оқиғалар және кез келген A және B оқиғалары үшін

$$A \bigcup \overline{A} = \Omega,\ \ A\overline{A} = \varnothing,\ \ A \setminus B = A\overline{B} = \overline{B} \setminus \overline{A},\ \ \overline{\overline{A}} = A,$$

$$A \subseteq \Omega,\ \ \varnothing \subseteq A,\ \ A \bigcup A = A,\ \ AA = A.$$

Ескерту. Біз жоғарыда қосу мен көбейту амалдарын екі оқиға үшін анықтадық. Бұл амалдарды кез келген оқиғалар саны үшін де анықтауға болады. Мәселен, $C = A \bigcap B \bigcap \ldots$ оқиғасы барлық $A, B, \ldots$ оқиғалары пайда болған кезде ғана пайда болатын оқиға, ал $C = A \bigcup B \bigcup \ldots$ оқиғасы $A, B, \ldots$ оқиғаларының ең болмағанда біреуі пайда болған кезде ғана пайда болатын оқиға.

Анықтама бойынша қосу $(\bigcup)$ және көбейту $(\bigcap)$ амалдары ассоциативті және коммутативті: кез келген A,B,C оқиғалары үшін

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),\quad A \cup B = B \cup A,$$

$$A \bigcap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C,\quad A \cap B = B \cap A.$$

Сонымен бірге қосу $(\bigcup)$ және көбейту $(\bigcap)$ амалдары өзара дистрибутивті:

$$A \bigcup (B \cap C) = (A \cup B) \bigcap (B \cup C),\quad A \bigcap (B \cup C) = (A \cap B) \bigcup (A \cap C).$$

Енді ықтималдықтар теориясында аса маңызды рөл атқаратын *қосарлылық (екі жақтылық) принципі* туралы қысқаша айта кетелік. Бұл принцип бойынша кез келген екі оқиғаның қосындысына қарама-қарсы оқиға бұл оқиғалардыңқарама-қарсы оқиғаларының көбейтіндісіне тең және кез келген екі оқиғаның көбейтіндісіне қарама-қарсы оқиға сол оқиғалардың қарама-қарсы оқиғаларының қосындысына тең, яғни кез келген А және B оқиғалары үшін

$$\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B},\quad \overline{A \bigcap B} = \overline{A} \bigcup \overline{B} \tag{1}$$

Мысал үшін (1) формуладағы бірінші теңдікті оқиғалардың теңдігі ретінде қарастырып дәлелделік. Анықтама бойынша $\overline{A \bigcup B}$ оқиғасы $A \bigcup B$ пайда болмаған кезде ғана, яғни А жєне B оқиғаларының екеуі де пайда болмаған кезде ғана пайда болатын оқиға. Демек, $\overline{A \bigcup B}$ пайда болса $\overline{A}$ және $\overline{B}$ оқиғаларының екеуі де пайда болады, бұл $\overline{A \bigcup B}$ оқиғасы $\overline{A} \bigcap \overline{B}$ оқиғасын ілестіреді деген сөз: $\overline{A \bigcup B} \subseteq \overline{A} \bigcap \overline{B}$. Керісінше, егер $\overline{A} \bigcap \overline{B}$ оқиғасы пайда болса, онда А және B оқиғаларының екеуі де пайда болмайды, яғни $A \bigcup B$ пайда болмайды. Сондықтан $\overline{A} \bigcap \overline{B} \subseteq \overline{A \bigcup B}$. Ендеше оқиғалардың теңдігінің анықтамасы бойынша $\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B}$.

Енді осы айтылғанды оқиғаларды жиындар ретінде қарастырып дәлелделік. Ол үшін $\overline{A \bigcup B} \subseteq \overline{A} \bigcap \overline{B}$ және $\overline{A} \bigcap \overline{B} \subseteq \overline{A \bigcup B}$ екенін көрсету жеткілікті. Дәлелдеу мына төмендегі схемадан шығады ($\Leftrightarrow$ символын "эквивалентті" (мәндес) деп оқу керек):

$$\omega \in \overline{A \bigcup B} \Leftrightarrow \omega \notin A \bigcup B \Leftrightarrow \omega \notin A,\ \omega \notin B \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \omega \in \overline{A},\ \omega \in \overline{B} \Leftrightarrow \omega \in \overline{A} \bigcap \overline{B} \qquad (2)$$

Жазылған (2) қатынасты солдан оңға қарай оқысақ $\overline{A \bigcup B} \subseteq \overline{A} \bigcap \overline{B}$ шығады. Егер (2) қатынасты оңнан солға қарай оқысақ, одан $\overline{A} \bigcap \overline{B} \subseteq \overline{A \bigcup B}$ екендігі шығады.

Әлбетте, екі жақтылық принципі кез келген оқиғалар жиыны үшін дұрыс:

$$\overline{\bigcup_{\alpha \in S} A_\alpha} = \bigcap_{\alpha \in S} \overline{A_\alpha}; \qquad \overline{\bigcap_{\alpha \in S} A_\alpha} = \bigcup_{\alpha \in S} \overline{A_\alpha} \qquad (1')$$

Мұндағы $\bigcup_{\alpha \in S} \left(\bigcap_{\alpha \in S} \right)$ символы индекстері $\alpha \in S$ бойынша ажыратылатын A_α оқиғалар жиынының қосындысын (көбейтіндісін) білдіреді, индекстер жиыны S саналымды емес жиын болуы да мүмкін. Мына қатынасты да

$$A \subset B \quad \Leftrightarrow \quad \overline{A} \supset \overline{B} \qquad (3)$$

әдетте екі жақтылық принципіне жатқызады.

Есеп. (3) қатынасты дәлелдеңіз.

Екі жақтылық принципінің ықтималдықтар теориясындағы мәні мынада: қандай да бір оқиғалар жүйесіне қатысты кез келген тұжырым үшін оған эквиваленті тұжырым айтуға болады. Соңғы тұжырымда оқиғалар қарама-қарсы оқиғаларға, ал қосу амалы көбейту амалына, керісінше көбейту амалы қосу амалына ауыстырылуы және де (3) қатынастың еске алынуы керек. Мәселен, $\left(A \bigcup B\right) \bigcap C \subseteq M \setminus N$ тұжырымы $\overline{\left(A \bigcup B\right) \bigcap C} \supseteq \overline{M \setminus N}$ тұжырымына эквивалентті, ал соңЄы тұжырымды былай $\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) \cup \overline{C} \supseteq \overline{M} \cup N$ жазуға болады.

Дистрибутивтілік қатынастарына қайта оралып, кез келген оқиғалар жүйесі $\{A_\alpha, \quad \alpha \in S\}$ үшін мына қатынастардың орындалатынын айта кетейік

$$A \cup \left(\bigcap_{\alpha \in S} A_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in S} \left(A \cup A_\alpha \right); \quad A \cap \left(\bigcup_{\alpha \in S} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in S} \left(A \cap A_\alpha \right); \qquad (4)$$

Дербес жағдайда,

$$A \bigcap \left(A_1 + A_2 + \ldots \right) = A \cap A_1 + A \cap A_2 + \ldots$$

Есеп. (4) қатынастарды дәлелдеңіз.

Жоғарыда келтірілген 3-мысалға қайта оралып, A -деп ойын сүйегін лақтыру нәтижесінде жұп ұпай түсті, ал B деп түскен ұпай саны үштен аспайды деген оқиғаларды белгілейік. Онда $A \bigcup B$ түскен ұпай саны бестен өзгеше, $A \bigcap B$ түскен ұпай саны екіге тең, $A \setminus B$ түскен ұпай саны не 4, не 6, $\overline{A}$ - түскен ұпай саны тақ сан болады дегенді білдіретін оқиғалар. Жиын түрінде жазсақ

$$A = \{2,4,6\}, \quad B = \{1,2,3\}, \quad A \bigcup B = \{1,2,3,4,6\},$$
$$A \bigcap B = \{2\}, \quad A \setminus B = \{4,6\}, \quad \overline{A} = \{1,3,5\}.$$

Ескерту. Біз әзірше оқиға (кездейсоқ оқиға) ұғымын дискретті элементар оқиғалар кеңістігі жағдайында осы кеңістіктің кез келген ішкі жиыны ретінде анықтадық. Жоғарыда айтып кеткеніміздей элементар оқиғалар кеңістігі міндетті түрде дискретті бола бермейді. Жалпы жағдайда э.о.к. Ω -ның кез келген ішкі жиынын кездейсоқ оқиға деп айтуға болмайды. Дегенмен, жалпы жағдайда да элементар оқиғалар кеңістігі $\Omega = \{\omega\}$ нендей де бір жиын, ал кездейсоқ оқиға осы жиынның сигма-алгебра деп аталатын ішкі жиындар жүйесінде жататын кез келген ішкі жиыны ретінде анықталатынына оқушы назарын аудара кетелік (Бұл туралы толығырақ келесі бөлімде айтылады).

Сонымен, оқиға дегеніміз қандай да бір негізгі жиынның (элементар оқиғалар кеңістігінің) белгілі бір шарттарды қанағаттандыратын ішкі жиыны. Өз кезегінде оқиғаларға амалдар қолдану жиындарға амалдар қолданумен бірдей. Бірақ көңіл аударатын бір нәрсе, ықтималдықтар теориясының жиындар теориясынан өзгеше өзіне тән терминологиясы, атаулары бар. Ықтималдықтар теориясы мен жиындар теориясы терминологияларының арасындағы байланыс №1 таблицада көрсетілген.

№1 таблица

Белгілеу	Жиындар теориясындағы терминология	Ықтималдықтар теориясындағы терминолгия
Ω	Кеңістік (негізгі жиын)	Элементар оқиғалар кеңістігі, ақиқат оқиға.
$\omega, \omega \in \Omega$	Кеңістік элементі	Элементар оқиға ω
$A, \ A \subseteq \Omega$	A жиыны	A (кездейсоқ) оқиғасы
$A \bigcup B$ $A + B$	A және B жиында-рының қосындысы (біріктірілуі), бірігуі	A және B оқиғалары-ның қосындысы
$A \bigcap B$ AB	A және B жиында-рының қиылысуы	A және B оқиғаларының көбейтіндісі
$A \setminus B$	A және B жиында-рының айырымы	A және B оқиғаларының айырымы
$\varnothing$	Бос жиын	Мүмкін емес оқиға
$\overline{A}$	A -ға толықтауыш жиын	A -ға қарама-қарсы оқиға
$AB = \varnothing$	A мен B қиылыспайды	A мен B үйлеспейді
$A \subseteq B$	A жиыны B жиы-нының ішкі жиыны	A оқиғасы B оқиғасын ілестіреді
$A = B$	A мен B тең жиындар	A мен B тең оқиғалар